Литература

1. Карачик В. В. *О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре* // Математические труды. – 2013. – Т. 16. – № 2. – С. 69–88.

2. Karachik V. V. *On the mean-value property for polyharmonic functions* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6. – № 3. – С. 59–66.

3. Карачик В. В. *Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана* // Математические заметки. – 2014. – Т. 96. – № 2. – С. 228–238.

4. Карачик В. В. *Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения* // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 11. – С. 1455–1461.

5. Карачик В. В. *Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. XVI. – № 4(56). – С. 61–74.

ON IDENTITIES ON THE UNIT SPHERE FOR POLYHARMONIC FUNCTIONS

V.V. Karachik

Some identities for integrals over the unit sphere of the normal derivatives of polyharmonic in the unit ball functions are obtained.

Keywords: polyharmonic functions, normal derivatives, identities on the unit sphere.

УДК 517.982

ОБ УСЛОВИЯХ КОМПАКТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ $\varphi(L)$

И.Н. Катковская[1], В.Г. Кротов[2]

1 *ikatkovskaya@bntu.by*; Белорусский национальный технический университет
2 *krotov@bsu.by*; Белорусский государственный университет

В работе приводятся критерии компактности множеств в пространствах $\varphi(L)$*, состоящих из классов эквивалентности измеримых функций* f*, для которых композиция* $\varphi\circ f$ *суммируема на метрическом пространстве* X *с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Здесь* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *— четная функция, положительная, непрерывная и возрастающая на* $(0,+\infty)$*, причем* $\varphi(+0)=0$*,* $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$*. Кроме того, предполагается, что* φ *удовлетворяет* Δ_2*-условию Орлича. Критерии компактности формулируются в терминах максимальных операторов, измеряющих локальную гладкость.*

Ключевые слова: условие удвоения, компактность, пространства суммируемых функций, максимальные операторы, локальная гладкость.

Пусть (X,d,μ) — ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ, удовлетворяющее условию удвоения

$$\mu(B(x,2r))\le C_\mu\mu(B(x,r)),\quad x\in X,\ r>0,$$

где $B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$.

Пусть Φ — множество всех четных функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, положительных, непрерывных и возрастающих на $(0, +\infty)$, причем

$$\varphi(+0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty, \quad \varphi(2t) \le C\varphi(t), \quad t > 0.$$

Пусть Ω обозначает класс положительных возрастающих функций $\eta : (0,1] \to (0,1]$, для которых $\eta(+0) = 0$.

Если $\varphi \in \Phi$, то $\varphi(L)$ — множество (классов эквивалентности) измеримых функций $f : X \to \mathbb{R}$, для которых композиция $\varphi \circ f$ суммируема на X. Подробную информацию о классах $\varphi(L)$ можно найти в [1]. В частности, в [1, §6] указано, что в $\varphi(L)$ имеется естественная топология, предбазой которой является семейство множеств

$$\left\{ g \in \varphi(L) : \int_X \varphi(f-g)\, d\mu < \varepsilon \right\}, \quad f \in \varphi(L),\ \varepsilon > 0.$$

Множество $S \subset \varphi(L)$ назовем ограниченным в $\varphi(L)$, если

$$\sup_{f\in S} \int_X \varphi(f)\, d\mu < \infty.$$

Для $\eta \in \Omega$, $\varphi \in \Phi$, $q > 0$ и $f \in \varphi(L)$ обозначим

$$\mathcal{N}_\eta^{\varphi,q} f(x) = \sup_{B\ni x} \frac{1}{\eta(r_B)} \left(\fint_B \varphi^q(f(x) - f(y))\, d\mu(y) \right)^{1/q}$$

(точная верхняя граница берется по всем шарам $B \subset X$, содержащим точку x). Максимальные операторы такого рода впервые рассматривались А. Кальдероном [2] для степенных функций η. Для любых $\eta \in \Omega$ их ввел В.И. Коляда [3].

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $q > 0$ и $S \subset \varphi(L)$ — ограниченное множество. Тогда если для некоторой $\eta \in \Omega$*

$$\sup_{f\in S} \int_X \mathcal{N}_\eta^{\varphi,q} f\, d\mu < +\infty, \tag{1}$$

то S вполне ограничено в $\varphi(L)$.

Утверждение, обратное к теореме 1, также справедливо, но при дополнительном ограничении $0 < q < 1$. При $q \ge 1$ условие (1) уже перестает быть необходимым для полной ограниченности множества $S \subset \varphi(L)$.

Условие (1) в теореме 1 можно несколько ослабить.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $q > 0$ и $S \subset \varphi(L)$ — ограниченное множество. Тогда если*

$$\lim_{r\to+0} \sup_{f\in S} \int_X \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \varphi^q(f(x) - f(y))\, d\mu(y) \right)^{1/q} d\mu(x) = 0, \tag{2}$$

то S вполне ограничено в $\varphi(L)$.

Для неограниченных пространств X теоремы 1 и 2 неверны. Однако они остаются справедливыми и в таком случае, если от множества S дополнительно потребовать выполнения следующего условия:

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in S} \int\limits_{X\setminus B(x_0,R)} \varphi(f)\, d\mu = 0,$$

где $x_0 \in X$ — некоторый фиксированный элемент. Необходимость таких условий для компактности множеств в пространствах суммируемых функций впервые отметил Я.Д. Тамаркин [4].

Для степенной функции $\varphi(t) = t^p$ при $p > 0$ эти результаты были получены в [2]. Мы используем методы этой работы.

Литература

1. Ульянов П. Л. *Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$* // Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 27. – № 2. – С. 1–54.

2. Calderon A. P. *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions* // Studia Math. – 1972. – V. 44. – № 3. – С. 561–582.

3. Коляда В. И. *Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью* // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 293. – № 4. – С. 534–537.

4. Tamarkin J. D. *On the compactness of the space L_p* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1932. – Т. 38. – № 2. – С. 79–84.

5. Кротов В. Г. *Критерии компактности в пространствах L^p, $p \geq 0$* // Матем. сб. –2012. – Т. 203. – № 7. – С. 129–148.

ON COMPACTNESS CONDITIONS IN THE SPACES $\varphi(L)$

I.N. Katkovskaya, V.G. Krotov

In this paper, we give criteria for the compactness of sets in the spaces $\varphi(L)$ consisting of equivalence classes of measurable functions f for which the composite $\varphi \circ f$ is summable on a metric space X with a measure that satisfies the doubling condition. Here $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an even function, positive, continuous and increasing on $(0, +\infty)$, and $\varphi(+0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. In addition, it is assumed that φ satisfies the Orlicz Δ_2-condition. The compactness criteria are formulated in terms of maximal operators measuring the local smoothness.

Keywords: doubling condition, compactness, spaces of summable functions, maximal operators, local smoothness.

УДК 517.5

ПРОБЛЕМА О СКАЧКЕ НА ДУГЕ ДЛЯ β-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Б.А. Кац[1], С.Р. Миронова[2], А.Ю. Погодина[3]

1 *katsboris877@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *srmironova@yandex.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ
3 *apogodina@yandex.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

Мы рассматриваем краевую задачу о скачке на жордановой дуге и ищем решение в классе функций, являющихся β-аналитическими функциями.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, краевая задача о скачке, β-аналитические функции.